HYDRODYNAMIK DER ROTIERENDEN FLÜẞIGKEITEN

Von A. A. Nikolski

Versetzen wir einen mit Flüßigkeit einfüllenden Hohlkörper in der Umdrehung, so beginnt nach einiger Zeit die Flüßigkeit im Inneren des Körpers wegen der Zähigkeit wie ein starrer Körper zu rotieren. Es ist interessant die Gesetzmäßigkeiten aufzustellen, die bei der Wechselwirkung der wie ein starrer Körper rotierenden Flüßigkeit mit bewegten axialsymmetrischen starren Körpern oder mit Flächen gelten (dabei können diese Flächen mit der Zeit seine Form verändern).

Für einen bestimmten Parametersbereich haben Zähigkeitskräfte einen Einfluß nur in Grenzschichten, und man kann außer diesen Grenzschichten die Flüßigkeit als ideale betrachten. Hier findet ideale Wechselwirkung der elementaren Flüßigkeitsringe statt. Jeder solcher Ring hat einen stetigen Drehmoment.

Es gelingt die allgemeine lineare Theorie der nichtstationären erwähnten Bewegungen zu entwickeln, wenn diese Bewegungen nur wenig von den rotierenden Ausgangsbewegungen der Flüßigkeit wie ein starrer Körper sich unterscheiden. Die Aufgabe der aus dem Ruhezustande beginnenden axialen Körperbewegungen mit beliebigen Gesetzen der Geschwindichkeitsveränderung ist auf eine klassikale Aufgabe der potentialen nichtrotierenden Flüßigkeitsbewegungen zurückgeführt. Eine allgemeine Lösung der Probleme ist gegeben, wenn ein beliebiges Ellipsoid und insbesondere Sphäre und runder Diskus aus dem Ruhezustande nach dem beliebigen Gesetz sich bewegen.

Es zeigte sich, daß ein Verhältnis der charakteristischen Prozessbewegungszeit zu der Zeit der Umdrehung auf einem Bogenmaß in Flüßigkeitsbewegung, wie ein starrer Körper, sehr wichtig ist. Ist dieses Verhältnis klein, so sind die Gesetze der radialen und axialen Verschiebungen und Kräftewechselwirkungen dieselben, wie im Fall der zudrehenden Flüßigkeit mit denselben Randbedingungen. Ist dieses Verhältnis größer, als Eins, so beweist das erhaltene Universalgesetz des Bewegungswiderstandes, daß die Natur der Widerstandskräfte durch Flüßigkeitsrotation in gründlicher Weise verändert wird.

Der Widerstand ist der Geschwindigkeit der Körperbewegung und nicht der Beschleunigung proportional, wie es im Fall der nichtrotierenden Flüßigkeit stattfindet. Dabei hängt nicht die Widerstand von der Form des Körpers, sondern von seinem maximalen Radialausmaß ab.

Eine Untersuchung der Wechselwirkung der rotierenden Flüßigkeit, die sich fortschreitend bewegt, mit Hohlungswänden, ist durchgeführt; abflußartige Strömungen der rotierenden Flüßigkeit sind also untersucht. Die periodischen Schwingungsbewegungen der rotierenden Flüßigkeit sind betrachtet. Es ist erwiesen, daß sinusförmige Schwingungen in Abhängigkeit von der Größe $k_1 = \frac{T_0}{2T_1}$ mit ganz verschiedenen Gleichungen beschreiben (hier ist To-die Zeit der Umdrehung der Flüßigkeit, die wie ein starrer Körper sich bewegt; T_1 bedeutet eine verdoppelte Schwingungsperiode); für $k_1 > 1$ ist die Gleichung vom elliptischen Typus (Laplacegleichung für den axialsymmetrischen Fall) für $k_1 < 1$—vom hyperbolischen Typus (Zylinderwellengleichung).

Es ist festgestellt, daß bei der Körperbewegung in der Flüßigkeit, die begrenztes Volumen hat, dieses großen Einfluß in der Achsenrichtung der begrenzenden Wände hat (es handelt sich um "dauernde Prozesse"); bei hinreichend "dauernden" Prozessen ist der Widerstand bei nichtstationärer Bewegung der Körperverschiebung proportional, während der Widerstand, im Fall nichtzudrehender Flüßigkeit der Beschleunigung und im Fall der zudrehenden Flüßigkeit im unbegrenzten Raum der Geschwindlichkeit proportional ist.

Man kann ohne Mühe den Zähigkeitseinfluß abschätzen, wenn die festen Randflächen mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wie im Fall der Flüßigkeitsrotation, als starren Körper, drehen. Die großen konkreten Bewegungsgebiete, wo man den Reibungskräftewiderstand im Vergleich mit Druckkräftewiderstand vernachlässigen kann, sind vorhanden.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: x, r, Θ—zylindrische Koordinate; v_x, v_r, v_Θ— Projektionen des Geschwindigkeitsvektors auf die Tangenten an der Koordinatenkurven.

ω — die Winkelgeschwindigkeit der Ausgangsbewegung (ω = const)
t — Zeit, p — der Druck, ϱ — Dichte (ϱ = const).

Für die Ausgangsbewegung haben wir

$$v_x = v_r = 0; \qquad v_\Theta = \omega r, \qquad p = \tfrac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2$$

Wir betrachten den Fall, wenn v_x, v_r, v_Θ und p nur von x, r, t und nicht von Θ abhänging sind.

Wir nehmen an

$$v_\Theta = \omega r + v'_\Theta; \qquad p = \tfrac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2 + p';$$

Die exacten Bewegungsgleichungen für die ideale Flüßigkeit haben eine Form:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\Theta^r}{r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r};$$

$$\frac{\partial (v_\Theta r)}{\partial t} + v_x \frac{\partial (r v_\Theta)}{\partial x} + v_r \frac{\partial (r v_\Theta)}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial (r v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0.$$

Nach der Linearisierung erhält man:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p'}{\partial x}; \qquad \frac{\partial v_r}{\partial t} = 2\omega v_\Theta' = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p'}{\partial r};$$

$$\frac{\partial v_\Theta'}{\partial t} + 2\omega v_r = 0; \qquad \frac{\partial (r v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0;$$

Man kann Strömungsfunktion Ψ einführen; diese Funktion erfüllt folgende Gleichungen:

$$v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}; \qquad v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right] + 4\omega^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

Folgende partikulare Lösungen gelten:

$$\begin{aligned} \psi &= \omega r_0^3 e^{2k\omega t} \beta \Psi(X, R); \\ a &= r_0 X; \quad r = r_0 R, \quad \beta = \text{const.} \end{aligned} \tag{I}$$

$(\Psi X, R)$ — reele Funktion

k — reele oder imaginäre Konstante

r_0 — charakteristische Konstante, die Dimension der Länge hat.

Funktion $\Psi(X, R)$ erfüllt die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial X_1}\right) + \frac{k^2(1+k^2)}{|k^2|\,|1+k^2|}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) = 0;$$

wo

$$X_1 = \frac{|k|\,X}{\sqrt{|1+k^2|}} = \frac{|k|}{\sqrt{|1+k^2|}}\frac{x_0}{r_0};$$

dabei bezeichnet $|a|$, wie gewöhnlich, Modull der Größe a.

Für $k > 0$ gilt folgendes Gleichheitssystem:

$$\left.\begin{aligned}
&X_1 = \frac{kX}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\frac{x}{r_0};\\
&\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right) = 0;\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial X_1} = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial X_1};\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Dabei ist:

$$p' = -2\sqrt{1-k^2}\,\varrho(\omega r_0)^2\,\beta\Phi(X_1, R)e^{2k\omega t}$$

Für imaginären $k = ik_1$ ($k_1 > 0$) (eine periodische Bewegung) muß man reelle und imaginäre Teile betrachten:

$$\Psi = \omega r_0^3\beta\Psi(X_1, R)\begin{matrix}\cos 2k_1\omega t\\ \sin 2k_1\omega t\end{matrix}$$

In Abhängigkeit von Größe k_1 sind zwei prinzipielle verschiedene Fälle möglich; für $k_1 > 1$ gilt folgendes Gleichheitssystem:

$$\left.\begin{aligned}
&X_1 = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2-1}}X = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2-1}}\frac{x}{r_0};\\
&\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right) = 0;\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial X_1} = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial X_1};\\
&\frac{\partial}{\partial X_1}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Dabei ist:

$$p' = -2\sqrt{k_1^2-1}\,\varrho(\omega r_0)^2\beta\Phi(X_1, R)\begin{matrix}\sin 2k_1\omega t\\ \cos 2k_1\omega t\end{matrix} + F(R) + C(t)$$

wo $F(k)$, $C(t)$ Funktionen R und t sind,

Für $0 < k_1 < 1$ haben wir folgendes System:

$$\left.\begin{aligned}
&X_1 = \frac{k_1 X}{\sqrt{1-k_1^2}} = \frac{k_1}{\sqrt{1-k_1^2}}\frac{x}{r_0};\\
&\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial X_1}\right) - \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right) = 0;\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial X_1} = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial X_1};\\
&\frac{\partial}{\partial X_1}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}\right) - \frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Dabei ist:

$$p' = -2\sqrt{1-k^2}\,\varrho(\omega r_0)^2\beta\Phi(x_1, R)\,\frac{\sin 2k_1\omega t}{\cos 2k_1\omega t} + F(R) + C(t).$$

Die Randbedingungen $d\Psi = 0$, die Undurchdringlichkeit der nichtveränderlichen mit der Zeit Grenze in x, r, Θ. Ebene charakterisiert, geht in Bedingung $d\Psi(X_1, R) = 0$ auf die transformierende Grenze in X, R – Ebene über.

Die Differentialgleichungen (II) und (III) fallen mit den Differentialgleichungen, die potentialen Bewegungen der inkomprossiblen Flüßigkeit mit Potentialfunktion $\Phi(X_1, R)$ und Strömungsfunktion $\Psi(X_1, R)$ beschrieben, zusammen überein. Das sind Differentialgleichungen vom elliptischen Typus.

Die Differentialgleichungen (IV) sind vom hyperbolischen Typus, wobei die Gleichung für Φ eine Zylinderwellengleichung ist.

Betrachten wir einige Aufgaben, die auf die elliptischen Differentialgleichungen zurückgeführt werden.

Bewege sich ein axialsymmetrischer Körper mit Geschwindigkeit $V_\infty(t)$ in der unbegrenzten, ursprünglich rotierenden Flüßigkeit. Der Körper bewegt sich in der Richtung der negativen x-Achse, die eine Symmetrieachse ist, sei r_0 ein maximales radiales Körpersausmaß; die Mantelliniengleichungen im bewegten Koordinatensystem sind folgende:

$$x = r_0 f_1\left(\frac{r}{r_0}\right); \qquad x = -r_0 f_2\left(\frac{r}{r_0}\right);$$

Für $\qquad t = -\infty \qquad v_x = v_r = 0; \qquad v_\Theta = \omega r;$

Sei $\qquad V_\infty(t) = \beta\omega r_0 e^{2k\omega t} \qquad (\beta = \text{const})$

Man kann eine Lösung in Form (I) finden, dabei die Gleichheiten (II) und folgende Randbedingungen

$$\Psi(X_1, R) = 0; \qquad \text{bei} \qquad X_1 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f_1(R); \qquad X_1 = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f_2(R)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}(x_1, R) = \frac{\partial\Phi}{\partial X_1}(X_1, R) \to 1 \qquad \text{für} \qquad \sqrt{X_1^2 + R^2} \to \infty$$

gelten.

So haben wir eine Aufgabe der "fiktiven" potentialen Umströmung eines a-innenumformenden Körpers mit fortschreitenden Strom, dessen Geschwindigkeit im Unendlichen gleich Eins ist, $\frac{\partial\Phi}{\partial X_1} = 1$. Man braucht den Druck mittels einer der letzten Formeln zu berechnen, wo die Funktion $\Phi(X_1, R)$ wegen der "Archimedischen" Kraft durch die Funktion $\Phi_1(X_1, R) = \Phi(X_1, R) - X_1$ ersetzt ist.

Durch Integration der Druckkräfteprojektion auf die positive x-Achserichtung über Körper, erhalten wir für die Wiederstandskraft folgende Ausdruck:

$$D = 2\sqrt{1+k^2}\,\beta\omega r_0 e^{2k\omega t} M(k) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} M(k) \frac{dV_\infty}{dt};$$

$$M(k) = 2\pi\varrho r_0^3 \int_0^1 \left\{\Phi_1\left[\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f_1(R), R\right] - \Phi_1\left[-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f_2(R), R\right]\right\} R\, dR.$$

Es ist klar, daß $M(k)$ eine zugeordnete Masse im gewöhnlichen hydrodynamischen Sinn für einen in der x-Richtung bewegten Körper ist; die Gleichungen der Mantellinien sind folgende:

$$x = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} r_0 f_1\left(\frac{r}{r_0}\right); \qquad x = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} r_0 f_2\left(\frac{r}{r_0}\right);$$

So kann man diese Körper aus dem Ausgangskörper durch das Zusammenpressen in der x-Richtung erhalten.

Nehmen wir an, daß ein charakterisches Zeitmaß $T_1 = \dfrac{1}{kw}$ ist; das ist die Zeit, in der Größe V um e^2-mal sich verändert (e—ist die Neperische Zahl). Die Zeit der Umdrehung auf einem Bogenmaß, wenn Flüßigkeit wie ein starrer Körper mit Winkelgeschwindigkeit w rotiert, ist $T'' = \dfrac{1}{w}$. So haben wir $k = \dfrac{T''}{T'}$.

Für Größe $k \to \infty$ haben wir für Kraft D folgenden Ausdruck

$$D = M(\infty) \frac{dV_\infty}{dt};$$

Es ist offenbar, daß $M(\infty) = \lim\limits_{k\to\infty} M(k)$ eine "zugeordnete Masse" underformierter Körper ist. Für $k \to$ o gehen die Randbedingungen in Bedingungen der transversalen, potentialen fiktiven Umströmung eines runden Diskus über. Es ist klar, daß für $k \to$ o der Ausdruck $M(k)$ für den Körper der beliebigen Form gegen der zugeordneten Masse $M(0)$ eines runden Diskus mit Radius r_0 strebt. Es ist bekannt aus[(1)], daß $M(0)$ ist

$$M(0) = \frac{8}{3}\varrho r_0^3.$$

Im Zusammenhang mit dieser Tatsache für $k \to$ o hat das Hauptglied des Widerstandes folgende Form:

$$D = \frac{16}{3}\beta\varrho\omega^2 r_0^4 e^{2k\omega t} = \frac{1}{k} M(0) \frac{dV_\infty}{dt} = \frac{1}{k}\varrho r_0^3 \frac{dV_\infty}{dt} = \frac{16}{3}\varrho\omega r_0^3 V_\infty(t).$$

Diese Formeln zeigen, daß D durch zugeordnete Masse des Diskus $M(0)$, dividiert durch k, ausgedruckt wird; folglich für kleines k ist die zugeordnete Masse sehr groß. Offenbar, kann man die Lösungen der betrachtenden Randwertprobleme für verschiedene k- und β-Kombinationen summieren. Diese Tatsache erlaubt für beliebige Gesetze $V_\infty(t)$ die Lösungen zu finden. Die Ausdrücke $V_\infty(t)$ sind in der integralen Form gegeben:

$$V_\infty(t) = \omega r_0 \int_0^{k_0} \beta(k)\, e^{2k\omega t}\, \mathrm{d}k \qquad 0 < k_0 \leqslant \infty \tag{V}$$

Hier ist β eine beliebige Funktion, die Konvergenz der nötigen Integrale und notwendige Kleinigkeit der Große $V_\infty(t)/\omega r$ gewährleistet.

Um die Widerstandskraft zu erhalten, braucht man folgendes Integral zu berechnen

$$D = 2\omega r_0 \int_0^{k_0} \beta(k) \sqrt{1+k^2}\; e^{2k\omega t} M(k)\, \mathrm{d}k .$$

Ist in der Integralen Vorstellung (V) für $V_\infty(t)\, k \ll 1,\, k_0 \to 0$, so haben wir im Limit:

$$D = \frac{16}{3}\varrho\omega^2 r_0^4 \int_0^{k_0} \beta(k) e^{2k\omega t}\, \mathrm{d}k = \frac{16}{3}\varrho\omega r_0^3 V_\infty(t).$$

Integrale Vorstellung (V) ist für $0 < k_0 < < 1$ auf jeden Fall für beliebige aus dem Ruhenzustande beginnenden Bewegungen, dabei ist Zeitdauer dieser Bewegungen größer als Zeit der Umdrehung auf einen Bogenmaß der Flüßigkeit, die mit der Winkelgeschwindigkeit w wie starrer Körper rotiert. Die letzte Formel zeigt, daß ein ganz besonderes Widerstandsgesetz gilt: der Widerstand hängt nur von maximalem relativem Ausmaß und Geschwindigkeit ab.

In betrachtender Aufgabestellung sind nur Aufgaben der aus dem Ruhezustande beginnenden Bewegungen und Aufgaben der harmonischen Schwingungen völlig gelöst. Dabei braucht man die beliebigen Ellipsoiden zu betrachten, da nach den entsprechenden afinnen Umformungen in die Rotationsellipsoiden übergehen, und ist die Umströmung solcher Ellipsoiden bekannt[(1)]. Bewegt sich, zum Beispiel, eine Sphäre nach dem exponentialen Gesetz, so haben wir für zugeordnete Masse des deformierten Körpers folgenden Ausdruck:

$$M(k) = \frac{a_0}{2-a_0}\,\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,\frac{4}{3}\,\varrho\pi r_0^3$$

$$a_0 = 2(1+k^2)(1-k\,\mathrm{arcctg}\,k)$$

Im Falle der harmonischen Schwingungen für $k_1 > 1$ haben wir:

$$M(k_1) = \frac{a_0}{2-a_0} \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2-1}} \frac{4}{3} \varrho\pi r_0^3;$$

$$a_0 = 2(k_1^2-1)\left(\frac{k_1}{2} \ln\frac{k_1+1}{k_1-1} - 1\right)$$

Bewegt sich ein Körper nach dem exponentialen Gesetz, so erhalten wir auf Grund der vorigen Untersuchungen folgende Methoden für Suche des Achsengeschwindigkeistsfeldes und der Strömungslinien. Man braucht

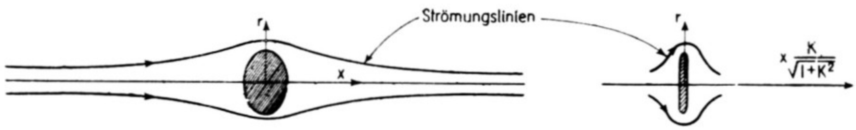

ABB. 1.

das Feld der Achsengeschwindigkeit und Strömungsfunktion bei der Umströmung eines runden ebenen Diskus (Radius des Diskus ist r_0) mit derselben Geschwindigkeit zu finden, und dann diese Felder in der x-Richtung $1/k$-mal auszudehnen (ABB. 1). Deshalb wird die Störungszone vorn und hinter dem Körper $\frac{1}{k}$ -mal vergrößert und, folglich, Flüßigkeitbewegungsgrößen in der x-Richtung also $\frac{1}{k}$ -mal vergrößert. Ist dabei die Flüßigkeit in der x-Richtung mit Wänden begrenzt, so hindern diese Wände für hinreichend kleines k der Entwicklung der Störungzone, und das Wider-

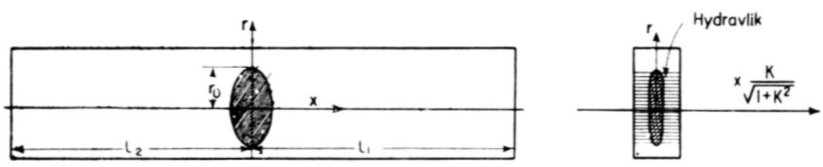

ABB. 2.

standsgesetz wird in gründlicher Weise verändert. Zum Beispiel, für Konfigurationen, die auf der ABB. 2 dargestellt werden, ziehen wir für hinreichend kleines k, nach der notwendigen Koordinaten Abbildung, das ganze Bild k-mal zusammen und erhalten, daß die Suche des Geschwindigkeitspotentials auf die Untersuchung der eindimensionalen radialen hydraulischen Bewegung zwischen den Diskus, der einen Körper ersetzt, und Hirnflächen des Gefäßes durchgeführt ist. Wir erhalten eigenartige "Hydrostatik". Für das Widerstandgesetz (Widerstandkraft), wenn ein Körper aus dem Ruhezustande sich bewegt, haben wir folgende Grenzformeln:

$$D = \frac{1}{2}\pi r_0^2 \varrho (\omega r_0)^2 \frac{\delta(t)}{r_0}\left(\frac{r_0}{e_2} - \frac{r_0}{e_1}\right).$$

Hier ist $\delta(t)$ ein Weg, der aus dem Ruhezustande bewegter Körper durchläuft. Dieses Gesetz hängt nicht von k und β ab, und gilt daher für beliebige Bewegungsgesetze der Körper im bestimmten Parameterbereich.

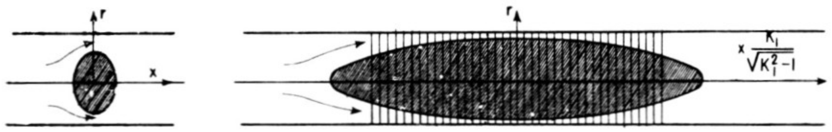

ABB. 3.

Betrachten wir in harmonische Schwingungen $k_1 > 1$, so brauchen wir für k_1 nahe Eins sehr stark $\left(\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2-1}}\text{-mal}\right)$, das Strömungsbild auszudehnen.

Es ist dabei die wichtige Rolle, die Radialgrenzen spielen, aufgeklärt (ABB. 3), da ein Umströmungspotential für dieses ausgedehnte Gebiet mit radialen Grenzen aus der hydraulischen Beziehungen gefunden werden kann, während es ganz anders ist, wenn radiale Wände fehlen.

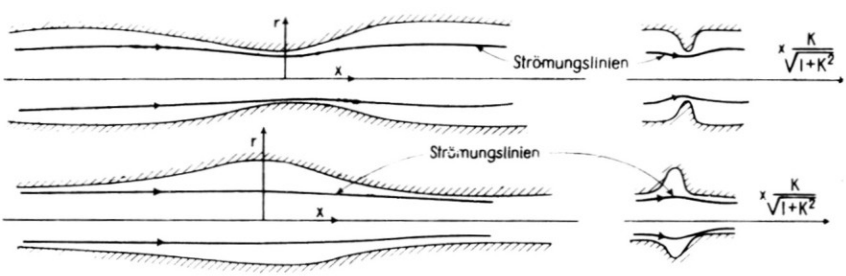

ABB. 4.

Obenerhaltene Methoden gelten also für die Bewegungen der rotierenden Flüßigkeit in einem Kanal (ABB. 4). Ist das Bewegungsgesetz eine exponentiale Funktion mit kleinem k, so braucht man ein Rohr zum Erhalten der Strömungslinien in der x-Richtung abzuplatten, und deshalb gelten hydrauliche Beziehungen nicht. Sogar in dem Kanal mit allmählicher Änderung des Querschnittes kann eine Ruhezone sich bilden (eigenartige Ablösung der Strömung).

Es ist zweckmäßig zum Anschluß einige Bemerkungen zu machen.

1. Eine Rückkontrolle zeigt, daß im Fall der Bewegungen nach dem exponentialen Gesetz, ebenso wie im Fall der Schwingungen die linearisierenden Gleichungen bis zur Rotationachse gelten; vernachlässigbare Glieder sind von höheren Ordnung der Kleinigkeit.

2. Die ganze Theorie gilt nur für solche Bewegungen, wo bezügliche radiale Verschiebungen klein sind. Dabei haben wir für kleines k (Exponentialfunktion) wegen einsprechender Bildausdehnung folgende Ordnungsabschätzung $v_r/v_x \sim k$; $x' \sim \frac{1}{k} r'$ und deshalb für kleines k können x-axiale Verschiebungen der Teilchen viel mehr als radiale Verschiebungen r' sein.

Insbesondere, wenn Geschwindigkeitsgesetz $V_\infty(t) = \omega r_0 \beta e^{2k\omega t}$, haben wir für $\delta(t)$ (ein fortlaufender Weg) folgende Formel:

$$\delta(t) = \frac{1}{2} r_0 \frac{\beta}{k} e^{2k\omega t}$$

und, derart, für kleinen k und β kann der Weg $\delta(t)$ Ordnung des Radius r_0 haben.

3. Betrachten wir harmonische Schwingungen für $k_1 > 1$ (elliptische Differentialgleichungen), so um Strömungslinienbild zu erhalten, müssen wir den Körper in der x-Richtung $\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2-1}}$-mal auszudehnen, Potentialumströmung dieses ausgedehnten Körpers finden, und dann das ganze Strömungslinienbild $\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2-1}}$-mal zusammenziehen.

Wenn $k_1 \to 1$, ist das Strömungsgebiet sehr eng, und folglich die auf den Körper wirkende Kraft sehr klein (ABB. 5).

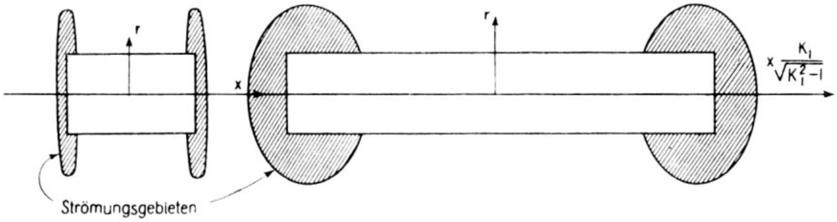

ABB. 5.

4. Wenn die Grenzflächen mit Winkelgeschwindigkeit ω rotieren, ist der Grenzschichtseinfluß gering, da Widerstandreibungseffekt wegen von dem Körper hinreißenden flüßigen Volumen der Grenzschichten, die für hinreichend große Reynoldssche Zahlen klein im Vergleich mit von dem Körper hinreißenden Volumen der idealen Flüßigkeit sind, vorhanden ist (ABB. 6).

Ähnliche lineare Gleichungen, wo die Zähigkeit in Betracht genommen wird, haben also exponentiale Lösungen des folgenden Typus:

$$v_x = \beta\omega r_0 e^{2k\omega t} V_x(X, R) \ u.s.w.$$

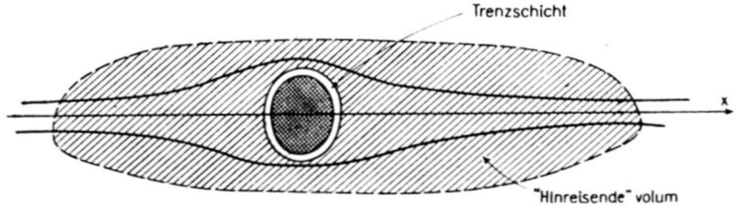

Abb. 6.

Als Ergebnis haben wir Gleichungssystem für dimensionlosen, von Zeit nichtabhängigen, Größen:

$$2kV_r - 2V'_\Theta = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial X^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V_2}{\partial R} - \frac{V_2}{R^2}\right)$$

$$2kV'_\Theta + 2V_2 = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 V'_\Theta}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 V'_\Theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V'_\Theta}{\partial R} - \frac{V_\Theta}{R^2}\right);$$

$$2kV_x = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V_x}{\partial R}\right);$$

$$\frac{(\partial R V_x)}{\partial X} + \frac{\partial(RV_2)}{\partial R} = 0; \qquad R = \frac{(\omega r_0) r_0}{V}$$

Die Untersuchungen dieses Systems bestätigt obenangeführte Behauptungen.

5. Um die automodellischen dauernden Bewegungen mit stetiger Geschwindigkeit zu betrachten, braucht man allgemeine, durch die Besselfunktionen ausgedruckte, Lösungen der Bewegungsgleichungen zu finden.

Ausgangsergebnisse dieser Arbeit wurden von dem Verfasser auf dem Ersten All-Union Kongreß für theoretische und angewandte Mechanik am 1-sten Februar 1960 berichtet.